Université Abdelmalek Essaâdi

Faculté des Sciences et Techniques

Tanger

2011 Semestre II

MIPC I-2 & I-4

Module P111

Electricité

I/ Soit le champ de vecteurs :

$$\mathbf{A}(x,y) = \frac{x\mathbf{j} - y\mathbf{i}}{x^2 + y^2}$$

a/ Calculer div**A** et **rotA**

b/ Evaluer la circulation de **A** le long d'une courbe fermée C. (l'origine 0 est à l'extérieur du domaine limité par C).

II/Calculer sur les chemins OAM ($A(x_1,0)$, $M(x_1,y_1)$) et OBM ($B(0,y_1)$, $M(x_1,y_1)$) la circulation du champ de vecteurs **E** de composantes :

$E_x = 6xy$, $E_y = 3x2 - 3y2$, $E_z = 0$

Conclure et calculer le potentiel dont dérive le champ **E**.

III/ Soit dans un système cartésien orthonormé, les deux champs de vecteurs :

$\mathbf{A}(A_x = -by/2,\ A_y = bx/2,\ A_z = 0)$ et $\mathbf{A'}(A'_x = -by\ ;A'_y = A'_z = 0)$.

1/Calculer **rotA** et **rotA'**.

2/ Montrer que le champ **C** = (**A** – **A'**) dérive d'un potentiel scalaire dont on donnera la valeur.

ETUSUP .com

IV/ On donne en coordonnées sphériques le potentiel indépendant de φ.

$$U(r,\theta) = -A/r + B/r^3(3\cos^2\theta - 1)$$

1/Montrer que le laplacien de U est nul.

2/Calculer les composantes du champ dérivant de U.

V/ 1/Calculer la surface de la bande découpée sur la sphère de rayon R et définie par ($\alpha \leq \theta \leq \beta$).

Que devient ce résultat quand $\alpha = 0$ et $\beta = \pi/2$.

2/Calculer l'aire de la portion de surface d'un cylindre circulaire droit de rayon R et de hauteur h, limité à $\pi/6 \leq \varphi \leq 2\pi/3$. En déduire la surface du cylindre.

VI/ On considère le champ de gravitation de la terre :

$$\mathbf{g} = -g_0R^2\mathbf{r}/r^3$$

Où r désigne le rayon vecteur et R le rayon de la terre.

1/Montrer que ce champ est à flux conservatif.

2/Calculer son flux à travers la surface de la terre.

3/Ce champ dérive t-il d'un potentiel ? Lequel ?

ETUSUP .com

TD électrostatique

exercice 1 :

a) $\vec{A}(x,y) = \dfrac{x\vec{j} - y\vec{i}}{x^2+y^2}$; $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + 0$$

$$= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

$\vec{A}$ est un champ de rotationnel, les source d'un champ de rotationnel tourbillons (courants).

- Un champ de vecteur $\vec{A'}$ tel que : $\vec{A} = \overset{\circlearrowleft}{\text{rot}}\,\vec{A'}$

$\vec{A'}$ est le potentiel vecteur de $\vec{A}$

$\vec{A'}$ n'est pas une solution unique, il est définit à un gradient d'une fct scalaire prêt.

* $\overset{\circlearrowleft}{\text{rot}}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 - 0$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 - 0$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \left[-\frac{(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$= \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

* $\overset{\circlearrowleft}{\text{rot}}\,\vec{A} = 0$

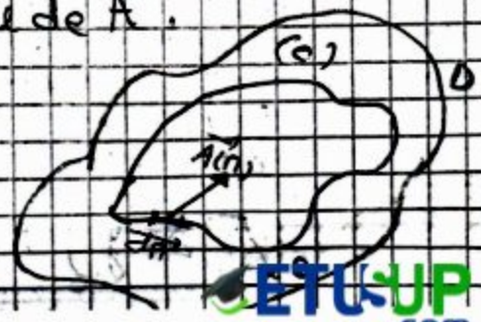
Champs $\vec{A}$ est un champ de gradient et ses sources sont ponctuel

$\vec{A} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, f$; f : potentiel scalaire de $\vec{A}$.

b) $\mathcal{C} = \vec{A}(x,y) \cdot \vec{d\Pi}$

$$\mathcal{C} = \int_C \vec{A}\cdot\vec{d\Pi} = \int_C \frac{x\vec{j} - y\vec{i}}{x^2+y^2}\left(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}\right)$$

$$= \int \frac{x\,dy\,\vec{j}}{x^2+y^2} \quad \frac{y\,dx\,\vec{i}}{x^2+y^2}$$



ETUSUP .com

$$= \int_C \frac{x\,dy}{x^2+y^2}\vec{j} - \int_C \frac{y\,dx}{x^2+y^2}\vec{i}$$

$$\vec{A} = -\overrightarrow{grad}\, f$$

$$df = \overrightarrow{grad} \cdot \overrightarrow{dM}$$

$$\mathcal{C} = \int_{C_f} \vec{A} \cdot \overrightarrow{dM} = \int_{C_f} -\overrightarrow{grad}\, f\, \overrightarrow{dM} = -\int_{C_f} -df$$

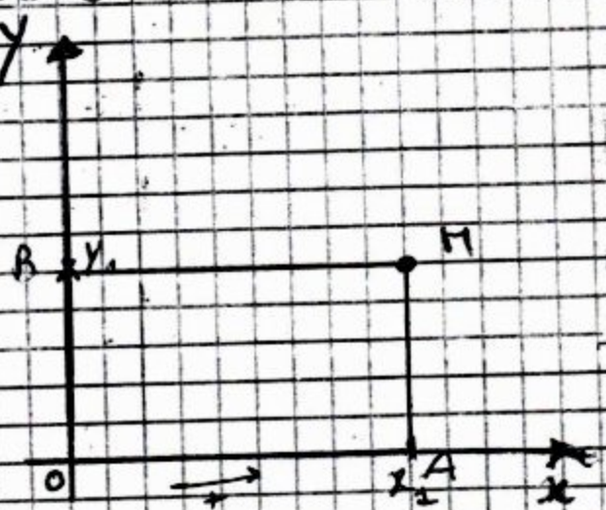
$$= f(M) - f(M) = 0$$

le Champ est indéfinie à l'origine, et la condition pour dire

le champ $\vec{A}$ est définie en tt point du domaine limitée par C donc on peut appliquer le th. de Stock, car le point O où le champ est indéfinie à l'ext de C.

$$\int_{C_f} \vec{A}\, \overrightarrow{dM} = \iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$$

exercice 2 :



$$\vec{E}\begin{pmatrix} 6xy \\ 3(x^2-y^2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d\mathcal{C} = \vec{E} \cdot \overrightarrow{dM}$$

$$\mathcal{C} = \int_{OAM} d\mathcal{C} = \int_{OAM} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dM}$$

$$= \int_{OAM} 6xy\,\vec{i}\,dx\,\vec{i} + 3(x^2-y^2)\vec{j}\,dy\,\vec{j}$$

$$\mathcal{C} = \int_{OAM} 6xy\,dx + 3(x^2-y^2)\,dy = \int_{OAM} 6xy\,dx + 3x^2dy - 3y^2dy$$

$$= \int_{OA} 6xy\,dx + \int_{OA} 3x^2dy - \int_{OA} 3y^2dy + \int_{AM} 6xy\,dx + \int_{AM} 3x^2dy - \int_{AM} 3y^2dy$$

$$[3x^2y]_0^{x_1} + [3x^2y]_0^{y_1} - [y^3]_0^{y_1} + [3x^2y]_0^{y_1} + [3x^2y]_0^{y_1} - [y^3]_0^{y_1}$$

$= 3x_1^2 y + 3x_1^2 y - y^3 + 3x_1^2 y_1 + 3x_1^2 y_1 - y_1^3 = 6x_1^2 y - y^3 + 6x_1^2 y_1 - y_1^3$

exercice 3 :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -\frac{by}{2} \\ \frac{bx}{2} \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \vec{A'} = \begin{pmatrix} -by \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ +\frac{b}{2} + \frac{b}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

$\vec{A}$ n'est pas un champ de gradient.

$$\vec{rot}\,\vec{A} = b\vec{k}$$

$$\vec{rot}\,\vec{A'} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 + b \end{pmatrix} = b\vec{k}$$

De même $\vec{A'}$ n'est pas un champ de gradient.

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{A'} = \begin{pmatrix} -\frac{by}{2} + \frac{by}{2} = \frac{by}{2} \\ \frac{bx}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{rot}\,\vec{C} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ \frac{b}{2} - \frac{b}{2} = 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\vec{C} = -\vec{grad}\,U \Rightarrow \vec{C} \cdot \vec{dM} = -\vec{grad}\,U \cdot \vec{dM} = -dU$$

$$dU = -\vec{C} \cdot \vec{dM} = -\left(\frac{by}{2}dx + \frac{bx}{2}dy\right) = -\frac{b}{2}(y\,dx + x\,dy)$$

$$U = -\frac{b}{2}xy + cte$$

Exercice 4 : $U(r,\theta) = -\frac{A}{r} + \frac{B}{r^3}(3\cos^2\theta - 1)$.

$$\Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial U}{\partial\theta}\right).$$

car le potentiel indépendant de φ

$$\Rightarrow rU = -A + \frac{B}{r^2}(3\cos^2\theta - 1)$$

$$\frac{\partial(rU)}{\partial r} = -\frac{2B}{r^3}(3\cos^2\theta - 1)$$

$$\frac{\partial^2(rU)}{\partial^2 r} = \frac{6B}{r^4}(3\cos^2\theta - 1)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rU)}{\partial^2 r} = \frac{6B}{r^5}(3\cos^2\theta - 1)$$

$= -3x^2y + y^3 + cte$.

$U(a) = b \Rightarrow$ Calcule de la cte.

ETUSUP .com

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{-6B}{r^3}\cos\theta\sin\theta$$

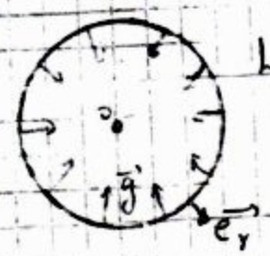
$$\sin\theta\,\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{-6B}{r^3}\cos\theta\sin^2\theta$$

exercice 6 : $\vec{g} = -g_0\frac{R^2}{r^3}\vec{r} = -g_0R^2\frac{1}{r^2}\vec{e_r}$

1) $\vec{g}$ est à flux conservatif implique $\Rightarrow$ le flux de $\vec{g}$ à travers une surface fermée est égale à 0.

$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{g} = 0$; $\iint_{S_f}\vec{g}\cdot ds = \iiint_v \operatorname{div}\vec{g}\cdot dv = 0$

$\operatorname{div}\vec{g} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 g_r)$



avec $r^2 g_r = -g_0R^2$

Donc : $\frac{\partial}{\partial r}(r^2 g_r) = 0 \Rightarrow \operatorname{div}\vec{g} = 0$.

2) $\iint_{S_t}\vec{g}\cdot\vec{dS} = \iint g_r\vec{e_r}\cdot dS\vec{e_r} = \iint_{S_t} -g_0\frac{R^2}{R^2}R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

$= -g_0R^2\iint\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = -g_0R^2\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi$

$-2\pi g_0R^2[-\cos\theta]_0^{\pi} = -2\pi g_0R^2(1+1) = -4\pi g_0R^2$

On remarque que le flux est défivent de 0, et il est en plus un signe (-), donc le champ $\vec{g}$ n'est pas a flux conservatif car la surface de la terre entour un domaine ou existe un point singulier pour le changée c'est le point $r=0$ ou g est indéfinie.

* $\vec{g}$ est a flux conservatif lorsque la surface de calcul ne contient pas du point singulier.

3) $\operatorname{rot}\vec{g} = 0$

$\operatorname{rot}\vec{g}\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}$; $\vec{g} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,U$

$dU = -\vec{g}\cdot\vec{dM} = +g_0\frac{R^2}{r^2}\vec{e_r} = g_0\frac{R^2}{r^2}dr$

$U = gR^2\int\frac{1}{r^2}dr = -g\frac{R^2}{r} + cte$

tend $r\to\infty$, $U\to 0 \Rightarrow cte = 0$

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Divers
Multimedia
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..